Pré-requis :

Bien connaître le chapitre de 1ere année : Taux d'évolution et évolutions successives.

<u>Objectifs</u> :

- Intérêts simples
- Taux proportionnel périodique
- Intérêts composés
- Taux équivalent périodique (ou taux actuariel)
- Valeur actuelle

Lorsqu'on place un capital sur un compte rémunéré, ce capital produit des intérêts. On peut envisager deux types d'intérêts, les **intérêts simples** ou les **intérêts composés**.

I) Intérêts simples

Définition 1 :

Un capital produit des **intérêts simples** sur une période lorsque les intérêts sont uniquement produits sur ce capital. C'est à dire si les intérêts ne produiront pas eux même des intérêts pour la période suivante.

- C'est le cas essentiellement pour des placements inférieurs à 1 an.

Le taux d'intérêt est alors appelé **taux nominal** (ou encore taux facial).

- Ce type d'intérêts <u>est peu utilisé</u>, on envisage plus fréquemment des intérêts composés (cf II).

Définition 2 :

Taux proportionnel

Dans le cas d'un placement à intérêts simples, le **taux proportionnel périodique** est simplement une fraction du taux nominal.

Formule de calcul :

$$\text{taux périodique proportionnel} = \text{taux nominal} \times \frac{\text{période}}{\text{période de référence}}$$

Exemples :

- le taux proportionnel sur une période de 15 jours d'un taux nominal de 10% l'an est $t_p = 0,1 \times \frac{15}{365} \approx 0,004$ soit 0,4%
- Dans un placement au taux nominal annuel de 5,1%, le **taux proportionnel mensuel** est de 0,051/12=0,00425 soit 0,425%

<u>Exercice</u> : EDF a lancé en mai 2009 un emprunt au taux annuel de 4,5% par an, avec intérêts simples, remboursable avec les intérêts en mai 2014.
Vérifier que, pour 500 € placés, le remboursement en 2014 a été de 612,5 €.

Remarque

Dans le cas d'un placement à **intérêts simples**, les valeurs successives du capital disponible sont en **progression arithmétique**, c'est à dire que ce sont les termes d'une suite arithmétique.

II) Intérêts composés

Un capital est placé à **intérêts composés** lorsque les intérêts sont **capitalisés** à la fin de chaque période et qu'ils produisent par conséquent des intérêts lors des période suivantes.

- C'est le cas par exemple lorsqu'on place un capital sur un livret A, un livret pour le Développement Durable (LDD), un compte épargne logement, un plan épargne logement, etc ...

Exemple
Livret à 2,5 %

A sa naissance, les parents de Simon on placé un capital de 1 000 € sur un livret d'épargne rémunéré à 2,5% l'an. Lorsque Simon aura 18 ans, il disposera d'un capital de $1000 \times 1,025^{18} \approx 1559,66$ €

Visionner cette vidéo qui présente le corrigé d'un exercice classique en faisant le lien entre intérêts composés et le chapitre antérieur sur les suites géométriques :

https://www.youtube.com/watch?v=-4xq1CP1eNs

Faire l'exercice n° 39 page 169 du manuel.

Définition
Taux équivalent

Dans le cas d'un placement à intérêts composés, le **taux équivalent périodique** est le taux qui appliqué successivement à toutes les périodes équivaut au taux global sur l'ensemble des périodes*« (voir taux d'évolution global / taux moyen équivalent dans le chapitre 1) »*. Ce taux équivalent s'appelle également **taux actuariel** dans le langage de la finance.

Formule de calcul :

$$\text{taux équivalent périodique} = (1 + \text{taux global})^{\frac{\text{période}}{\text{période de référence}}} - 1$$

Exemples :

1) • Le taux équivalent mensuel d'un taux annuel de 10% est $\left(1+\frac{10}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,008$ soit 0,8%

2) • Le taux équivalent pour une quinzaine d'un taux annuel de 12% est $\left(1+\frac{12}{100}\right)^{\frac{15}{365}} - 1 \approx 0,0047$ soit environ 0,47%

Reprendre l'exercice n° 39 page 169 du manuel et l'aborder autrement :
Calculer le taux équivalent mensuel de la société A et le comparer à celui de la société B. Conclure.

Remarque

Dans le cas d'**intérêts composés**, les valeurs successives du capital sont en **progression géométrique**. C'est à dire que ce sont les termes d'une suite géométrique.

III) Valeur actuelle

Dans le cadre d'un placement financier, la valeur actuelle (VA) est la valeur du capital qu'il faut placer pour espérer une valeur future donnée à un taux donné.

Méthode et formule de calcul

Soit VC la valeur future (espérée) d'un capital, t le taux de rémunération par période du placement, n le nombre de périodes de placement ; on a :

$VA = VC \times (1+t)^{-n}$

Exemple

Valeur actuelle

J'aurais besoin de 12 000 € pour restaurer la toiture de ma maison dans 5 ans.

Question

Quel capital dois-je placer aujourd'hui sur mon plan épargne logement rémunéré à 2,5% l'an pour disposer de cette somme dans 5 ans ?

Indice

Il s'agit bien de calculer la valeur actuelle de mon capital futur de 12000 €.

Solution

Appelons VC la valeur future de mon capital et VA sa valeur actuelle, appelons t le taux de rémunération du placement et n le nombre de périodes du placement.

On sait que $VC = VA \times (1+t)^n$ car c'est un placement à intérêts composés. (voir suites géométriques)

On en déduit $VA = \dfrac{VC}{(1+t)^n}$ ou encore $VA = VC \times (1+t)^{-n}$

Numériquement, $VA = 12000 \times 1,025^{-5} \approx 10606,25$

Il faut donc que je place environ 10 607 € aujourd'hui pour disposer d'environ 12 000 € dans 5 ans.

Vérification pour bien comprendre ce que l'on vient de calculer :

IV) Valeur actuelle d'une suite d'annuités

Méthode Formule de calcul

La situation précédente se généralise à une suite de n annuités constantes toutes égales à a et un taux d'intérêt t

En procédant comme précédemment, on établit que la valeur actuelle de la suite des n annuités est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme $\frac{a}{(1+t)^n}$ et de raison $(1+t)$ et on obtient la formule de calcul suivante :

- $V_0 = a \times \dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$

Exemple :

Une PME achète un matériel à crédit début janvier 2015 auprès de l'un de ses fournisseurs. Les caractéristiques du crédit sont les suivantes : taux annuel "tout compris" 4,2%, paiement en trois annuités égales à 2 500 € à payer fin décembre chaque année.

Conclusion :

.

Ce dernier résultat signifie que la valeur actuelle de cette suite de trois annuités est 6911,48 €, ou encore que si elle en a les moyens, la PME peut demander à son fournisseur de régler le matériel au comptant 6911,48 €.

Remarque Formule tableur

La valeur actuelle d'une suite de versements constants se calcule dans un tableur avec la formule :

- ▪ =VA(taux ;npm ;vpm ;[vc] ;[type])

où :

- 'taux' est le taux d'intérêt par période ;
- 'npm' est le nombre total de versements ;
- 'vpm' est le montant d'un versement ;
- '[vc]' est facultatif, c'est la valeur future ciblée après le dernier versement
- '[type]' est facultatif, on écrit 1 pour un remboursement en début de période et 0 (ou rien) pour un remboursement en fin de période.

V) Valeur Acquise d'une suite d'annuités

Situation

Un père de famille place chaque début d'année pendant 10 ans 540 € sur un plan épargne logement (PEL) rémunéré au taux de 2,5% (intérêts composés). Quelle est la valeur acquise du PEL juste après le dernier versement ?

On rappelle que la valeur acquise par un capital C_0 placé pendant n années au taux annuel t avec intérêts composés est $C_n = C_0 \times (1+t)^n$

Le premier versement a donc une valeur acquise de $540 \times 1{,}025^9$

Le second versement $540 \times 1{,}025^8$

.../...

On admet que la valeur acquise de la suite des versements est la valeur acquise par la valeur actuelle de la suite d'annuités correspondantes $V_0 = a \times \dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t}$ placé pendant n années au taux t à intérêts composés.

On a donc $V_n = V_0 \times (1+t)^n \quad = a \times \dfrac{1-(1+t)^{-n}}{t} \times (1+t)^n = a \times \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$

Donc notre père de famille disposera de $540 \times \dfrac{1{,}025^{10} - 1}{0{,}025} \approx 6049{,}83$ € juste après son 10ième versement.

Méthode
Formule de calcul

La valeur acquise d'une suite de n versements périodiques constants de valeur a , après le dernier versement, au taux périodique t se calcule avec la formule :

- $V_n = a \times \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$

Exercices : n° 60 et 61 page 176

Remarque
Formule tableur

La valeur acquise d'une suite de versements constants se calcule dans un tableur avec la formule :

- =VC(taux ;npm ;vpm ;[vc] ;[type])

où :

- 'taux' est le taux d'intérêt par période ;
- 'npm' est le nombre total de versements ;
- 'vpm' est le montant d'un versement ;
- '[va]' est facultatif, c'est la valeur actuelle ;
- '[type]' est facultatif, on écrit 1 pour un paiement des intérêts en début de période et 0 (ou rien) pour un paiement en fin de période.